Appendix – MeetMini

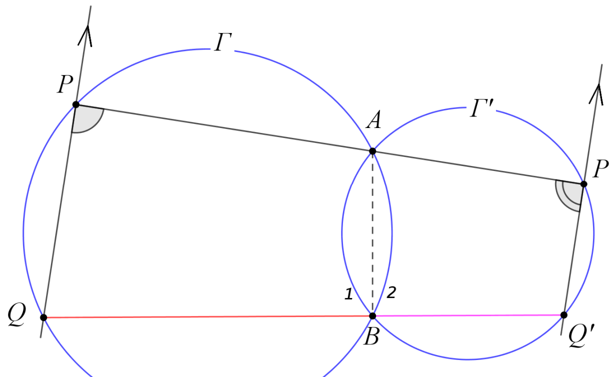
Twee meetkunde-miniaturen

DICK KLINGENS (e-mailadres: *dklingens@gmail.com*)

maart 2018

1. De *omgekeerde* stelling van Reim [1]

figuur a1



Gegeven in figuur a1:

- de cirkels Γ en Γ' ;
- $\{A, B\} = \Gamma \,\&\, \Gamma'$;
- PAP' is een dubbelkoorde [1] van Γ en Γ' ;
- QB is een koorde van Γ, $Q'B$ is een koorde van Γ' ;
- $PQ \parallel P'Q'$.

Te bewijzen: QBQ' is een dubbelkoorde van Γ en Γ'.

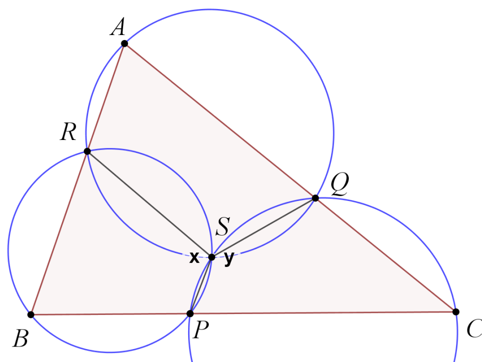
Bewijs. In dit geval moet worden aangetoond dat $\angle QBQ' = 180^\circ$.
Omdat $PQ \parallel P'Q'$ is, is $\angle P + \angle P' = 180^\circ$ (*niet-verwisselende binnenhoeken*).
Ik teken nu het lijnstuk AB en beschouw de koordenvierhoeken $P'Q'BA$ en $PQBA$.
Dan is:

- $\angle ABQ = \angle B_1 = \angle P'$ (*buitenhoek en overstaande binnenhoek van de koordenvierhoek*)
- $\angle ABQ' = \angle B_2 = \angle P$ (*idem*)

Zodat $\angle B_{12} = 180^\circ$. En daarmee is QBQ' een dubbelkoorde van Γ en Γ'. ◊

2. De *omgekeerde* stelling van Miquel

figuur a2



Gegeven in figuur a2:

- driehoek ABC;
- de punten P, Q, R liggen willekeurig op BC, CA, AB;
- de omcirkels van BPR en CQP snijden elkaar in S (en in P).

Te bewijzen: de omcirkel van ARQ gaat door S.

Bewijs. In de koordenvierhoek $BPSR$ is:

- $\angle B + \angle PSR = \angle B + x = 180^\circ$

In de koordenvierhoek $CQSP$ is:

- $\angle C + \angle QSP = \angle C + y = 180^\circ$

Dan is $(\angle B + \angle C) + (x + y) = 360^\circ$, of ook $(180^\circ - \angle A) = 360^\circ - (x + y)$.
Zodat rond het punt S geldt:

- $\angle QSR = 360^\circ - (x + y) = 180^\circ - \angle A$

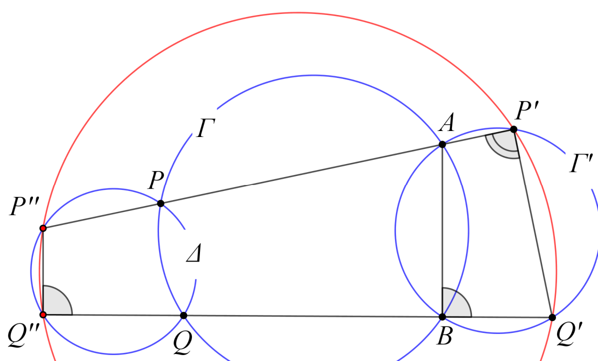
En daaruit blijkt dat vierhoek $ARSQ$ een koordenvierhoek is. Met andere woorden: de omcirkel van ARQ gaat door het punt S. Hetgeen te bewijzen was. ◊

3. Een derde cirkel erbij maakt vier

Gegeven in figuur a3:

- PAP' en QBQ zijn dubbelkoorden van Γ en Γ' ;
- de cirkel Δ gaat door P en door Q;
- $P'' = P'P \,\&\, \Delta$ en $Q'' = Q'Q \,\&\, \Delta'$.

figuur a3



Te bewijzen: de punten P', Q', P'', Q'' zijn concyclisch.

Bewijs. De cirkels Δ en Γ snijden elkaar in P en Q, waarbij $P''PA$ en $Q''QB$ dubbelkoorden zijn.

Volgens de stelling van Reim is dan: $P''Q''$ // AB.
Daardoor zijn de hoeken Q'' en B gelijk (het zijn *F-hoeken*; zie de hoekbogen in de figuur).

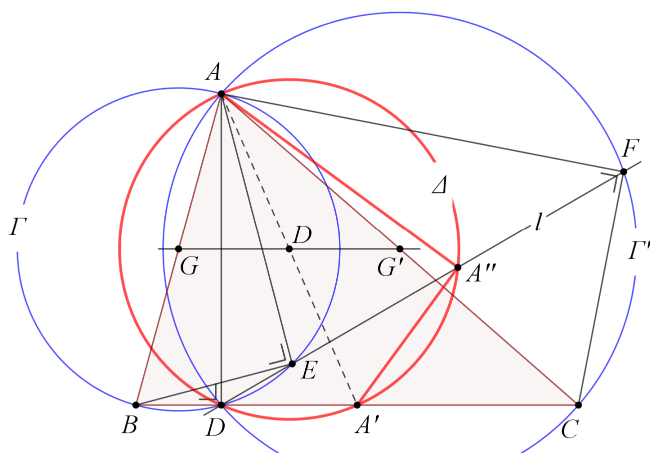
In koordenvierhoek $BQ'P'A$ is: $\angle B + \angle P' = 180^\circ$.
Met $\angle Q'' = \angle B$ (*F-hoeken*) is dan in vierhoek $Q''Q'P'P''$: $\angle Q'' + \angle P' = 180^\circ$.
Daardoor is vierhoek $Q''Q'P'P''$ een koordenvierhoek. Met andere woorden: de punten Q'', Q', P', P'' zijn concyclisch. En dit moest worden aangetoond. ◊

Opmerking. De omcirkel van vierhoek $Q''Q'P'P''$ vormt dus niet alleen een ‘cirkelpaar van Reim’ met Δ, maar ook met Γ'. ◊

4. De twee miniaturen

Miniatuur 1

figuur a4



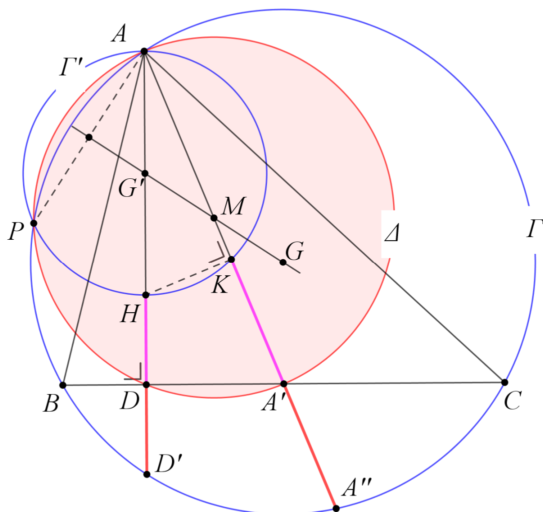
De omcirkel Γ van ABD en van ABE heeft als middelpunt G, dat samenvalt met het midden van AB.
De omcirkel Γ' van ACF heeft als middelpunt G', dat samenvalt met het midden van AC.
De cirkels snijden elkaar in A en D.

De **hdk-cirkel** van Γ en Γ'[2] gaat door A en D en ook door A' en A''; BDC en EDF zijn immers dubbelkoorden van Γ en Γ'.

Het middelpunt D van Δ is het midden van het lijnstuk GG', dat een middenparallel is van driehoek ABC.
Maar dan ligt D óók op de zwaartelijn AA', die dan de middellijn is van Δ.
Conclusie: $\angle A'A''A = 90^\circ$ (*cirkelstelling van Thales*).

Miniatuur 2

figuur a5



Het is duidelijk dat de koorden AD' en AA'' van Γ een rol moeten spelen.
De omcirkel Δ van driehoek ADA' zou de te beschouwen **hdk-cirkel** (middelpunt M) kunnen zijn.
De derde cirkel is dan de omcirkel Γ' van driehoek AKH, met middelpunt G' (midden van AH).

Dat A een gemeenschappelijk snijpunt is van die cirkels is direct duidelijk.

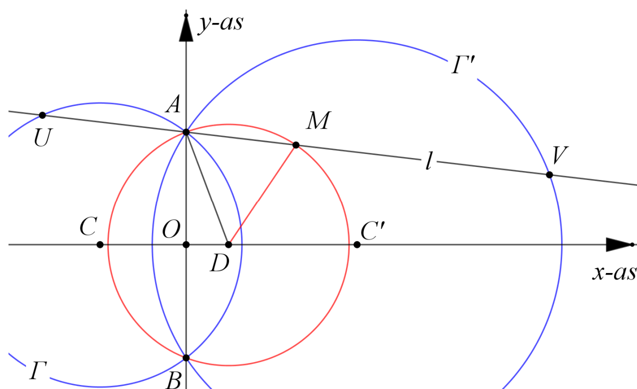
Maar ligt het tweede snijpunt P van Γ en Γ' ook op cirkel Δ? Want dat is nodig!

Natuurlijk, want M is het midden van GG', en die lijn is middelloodlijn van AP.

Omdat Δ nu inderdaad de hdk-cirkel is en omdat KAA'' een dubbelkoorde is van Γ en Γ', is het punt A' het midden van het lijnstuk KA''. Bewijs geleverd.

5. De hdk-cirkel, analytisch beschouwd

figuur a6



Gegeven in figuur a6:
- Γ, Γ' zijn *snijdende* cirkels;
- C, C' zijn de middelpunten van Γ, Γ' ;
- $\{A, B\} = \Gamma \,\&\, \Gamma'$;
- UAV is een dubbelkoorde op de lijn l;
- M is het midden van UV;
- D is het midden van CC'.

Te bewijzen:
als l om A draait is de meetkundige plaats van het punt M de cirkel (D, DA).

Bewijs. Ik kies een xOy-coördinatenstelsel waarvan de x-as langs CC' valt en de y-as langs AB. Ik normeer het stelsel zó, dat $A = (0, 1)$.
Verder kies ik $C = (2p, 0)$, $C' = (2q, 0)$, zodat $D = (p + q , 0)$. Vergelijkingen van beide cirkels zijn dan:
(5.1)... $\Gamma \;::\; (x-2p)^2 + y^2 = 4p^2 + 1$
(5.2)... $\Gamma' :: \; (x-2p)^2 + y^2 = 4q^2 + 1$
En een vergelijking van de lijn l is:
(5.3)… $l \;::\; y = ax + 1$ met $a \in \mathbb{R}$
terwijl verder:
(5.4)… $DA = \sqrt{(p+q)^2 + 1}$
Voor de x-coördinaat van het punt U volgt uit (5.1) en (5.3):
$(x-2p)^2 + (ax+1)^2 = 4p^2 + 1 \;\Rightarrow\; (1+a^2)x^2 - 4px + 2ax = 0$
Zodat: $x_U = \dfrac{4p-2a}{1+a^2}$. En analoog is dan, met (5.2) en (5.3): $x_V = \dfrac{4q-2a}{1+a^2}$.
Dan geldt voor de coördinaten (x_M, y_M) van het punt M:

$$x_M = \tfrac{1}{2}(x_U + x_V) = \frac{2p+2q-2a}{1+a^2}, \quad y_M = a\cdot\frac{2p+2q-2a}{1+a^2} + 1$$

Met de substitutie $p + q = k$ (voor iets eenvoudiger rekenwerk) is dan:
(5.5)… $x_M = \dfrac{2k-2a}{1+a^2}, \quad y_M = \dfrac{2ak-a^2+1}{1+a^2}$
De coördinaten (x_M, y_M) van het punt M voldoen aan beide bij (5.5) vermelde vergelijkingen, dus ook aan een combinatie van deze vergelijkingen waarin a niet voorkomt. De variabele a moet dus uit het stelsel (5.5) worden geëlimineerd.
In plaats van deze eliminatie uit te voeren bereken ik echter de afstand d van het punt D tot het variabele punt M:

$$d^2 = \left(\frac{2k-2a}{1+a^2} - k\right)^2 + \left(\frac{2ak-a^2+1}{1+a^2}\right)^2$$

Dus, even rekenen:

$$\begin{aligned}(1+a^2)^2 d^2 &= (\,2k-2a-k(1+a^2)\,)^2 + (2ak-a^2+1)^2\\ &= (k-2a-ka^2)^2 + (2ak-a^2+1)^2\\ &= (k^2+4a^2+a^4k^2-4ak-2a^2k^2+4a^3k) + (4a^2k^2+a^4+1-4a^3k+4ak-2a^2)\end{aligned}$$

Zodat, na vereenvoudiging:

$$(1+a^2)^2 d^2 = k^2 + 2a^2 + a^4k^2 + 2a^2k^2 + 1 + a^4$$
$$= (1+k^2)(1+a^4) + 2a^2(1+k^2)$$
$$= (1+k^2)(1+2a^2+a^4)$$
$$= (1+k^2)(1+a^2)^2$$

En dan is: $d^2 = 1 + k^2 = 1 + (p+q)^2$.
Het kwadraat van de afstand d van D tot M is dus *constant*, en daarmee ook d zelf.
Volgens relatie (5.4) is $d = DA$. Waarmee het gestelde is aangetoond. ◊

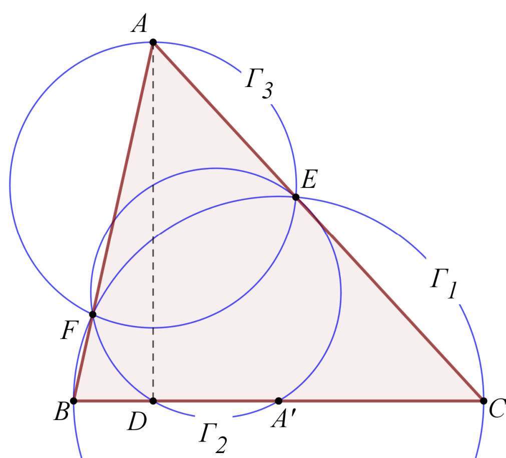
Opmerking. Een vergelijking van de in deze paragraaf gevonden meetkundige plaats, de **hdk-cirkel**, is dus:

- $(\, x - (p+q)\,)^2 + y^2 = (p+q)^2 + 1$ ◊

6. Tot slot, een derde miniatuur

Bij de onderstaande (extra) meetkunde-miniatuur stel ik in eerste instantie een paar vragen.
Mijns inziens vereist de beantwoording van die vragen alleen elementaire kennis van de meetkunde (inclusief kennis van de inhoud van het artikel *Twee meetkunde-miniaturen*).

figuur a7



Gegeven in figuur a7:
- driehoek ABC;
- AD is een hoogtelijn van driehoek ABC;
- A' is het midden van de zijde BC;
- Γ_1 is de cirkel op BC;
- $E = CA\ \&\ \Gamma_1$, $F = AB\ \&\ \Gamma_1$;
- Γ_2 is de omcirkel van driehoek $A'EF$;
- Γ_3 is de omcirkel van driehoek AEF.

Vragen

a. Een van de drie cirkels in figuur a7 is de hdk-cirkel van de twee andere.
Welke cirkel is dat? Geef een toelichting bij je antwoord.

b. In figuur a7 zijn de middelpunten van Γ_2 en Γ_3 niet getekend.
Geef (kort) aan hoe deze middelpunten kunnen worden geconstrueerd. Geef daarbij zo nodig een toelichting.

c. Γ_2 is de zogeheten negenpuntscirkel van driehoek ABC.[3]
Kan met behulp van de hdk-cirkel (bedoeld in vraag a) geïllustreerd worden dat Γ_2 door de middens van de hoogtelijnstukken tussen hoekpunt en hoogtepunt gaat?[4] Geef een toelichting bij je antwoord.

Zie paragraaf 8 voor mogelijke antwoorden.

7. Noten

[0] Deze appendix hoort bij het artikel *Twee meetkunde-miniaturen*.
Dat artikel is in maart 2018 ter publicatie aangeboden aan de redactie van het wiskunde-tijdschrift *Euclides*, het verenigingsblad van Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW).

[1] De stelling van Reim luidt: Snijden twee cirkels elkaar in de punten A en B en zijn PAP' en QBQ' twee dubbelkoorden van die cirkels, dan is PQ // $P'Q'$.
Een lijnstuk XX' is een *dubbelkoorde* van twee elkaar in A en B snijdende cirkels Γ en Γ', als het ene eindpunt van XX' op Γ en het andere op Γ' ligt, én als A (c.q. B) *op* het lijnstuk XX' of op een *verlengde* ervan ligt.

[2] Een hdk-cirkel ('halve-dubbelkoordencirkel') van twee elkaar snijdende cirkels is de cirkel die gaat door de snijpunten van die cirkels én door het midden van een dubbelkoorde van die cirkels. Zie ook paragraaf 5.

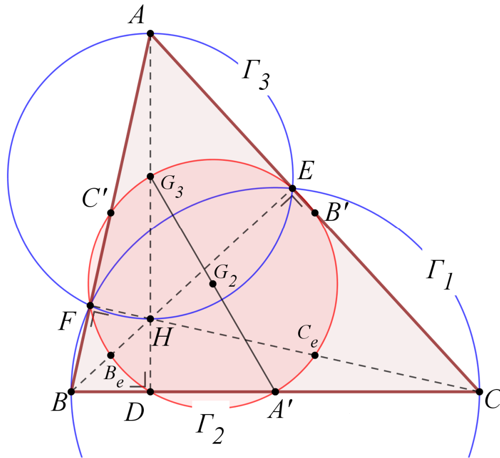
[3] De negenpuntscirkel van een driehoek wordt ook wel ‘cirkel van Feuerbach’ genoemd. Zie eventueel:
» Dick Klingens (2000): *Over de cirkel van Feuerbach en de lijn van Euler.* Op (de website van de auteur): *http://www.pandd.demon.nl/feuerbach.htm*
of:
» Dick Klingens (2009): *Negenpuntscirkel.* Ongepubliceerd artikel; elektronisch toegankelijk op: *http://home.hccnet.nl/d.klingens/downloads/Negenpuntscirkel.pdf*

[4] Het deel van een hoogtelijn tussen het hoekpunt en het hoogtepunt wordt in de Nederlandse wiskunde-literatuur soms ook wel aangeduid met de term ‘bovenste hoogtelijnstuk’.

≡≡ ↓ SPOILER bij paragraaf 6 ↓ ≡≡

8. Antwoorden bij paragraaf 6

figuur a8



Zie figuur a8. Uiteraard zijn ook de lijnen *BE* en *CF* hoogtelijnen van driehoek *ABC* (*cirkelstelling van Thales*). *H* is het hoogtepunt.

a. De cirkels Γ_1 en Γ_3 gaan *niet* door middens van lijnstukken. Dus is Γ_2 de *kandidaat-hdk-cirkel*. De drie cirkels gaan door de punten *E* en *F*. *BFA* en *CEA* zijn dubbelkoorden van Γ_1 en Γ_3. De punten $B' = CA$ & Γ_2 en $C' = BA$ & Γ_2 zouden dan de middens moeten zijn van *BA* en *CA*.
En dat is ook zo, want Γ_2 is de zogeheten negenpuntscirkel van driehoek *ABC*, en deze cirkel gaat onder andere door de middens van de zijden van driehoek *ABC*.

b. Het middelpunt van Γ_3 is het midden G_3 van *AH*. De driehoeken *AFH* en *AEH* zijn rechthoekig in *F* en *E*. *AH* is dus de middellijn van Γ_3 (*cirkelstelling van Thales*).
Het middelpunt G_2 van Γ_2 is dan weer het midden van het lijnstuk G_3A'. Het middelpunt van een hdk-cirkel valt immers samen met het midden van de centraal van beide bijbehorende cirkels van Reim.

c. *BEH* en *CFH* zijn dubbelkoorden van Γ_1 en Γ_3. De middens B_e, C_e van de lijnstukken *BH*, *CH* liggen dus op Γ_2.
Wat het 'bovenste A-loodlijnstuk' betreft. Dat het midden G_3 van *AH* óók op Γ_2 ligt, kan *niet direct* worden verklaard met de hdk-cirkel Γ_2. De lijn *AH* gaat immers *niet* door het punt *E* of het punt *F*.

9. Over de auteur

Dick Klingens was van januari 2000 tot augustus 2014 (eind)redacteur van *Euclides*. Tot aan zijn pensioen in 2010 was hij ook actuarieel rekenaar, wiskundeleraar, lerarenopleider bij het technisch beroepsonderwijs en schoolleider. Van 2005 tot 2012 was hij lid-deskundige van de cTWO-ontwikkelgroep meetkunde voor wiskunde B vwo (eindexamen 2018).
Website: *http://www.pandd.nl*